

KANGOUROU DES MATHÉMATIQUES

des millions de participants dans toute l'Europe

Jeudi 18 mars 2004 — Durée : 50 minutes

Épreuve Étudiants

S

- L'épreuve est individuelle. Les calculatrices sont interdites.
- Il y a une seule bonne réponse par question. Les bonnes réponses rapportent 3, 4 ou 5 points selon leur difficulté (premier, deuxième et troisième tiers de ce questionnaire), mais une réponse erronée coûte un quart de sa valeur en points. Si aucune réponse n'est donnée, la question rapporte 0 point.
- Il y a deux manières de gagner des prix : « crack » (au total des points) et « prudent » (un maximum de réponses consécutives sans erreur depuis la première question). Environ 1 participant sur 6 reçoit un prix. Les classements sont séparés pour les **Terminale S** et pour les étudiants (**Bac +**).
- Les Malices du Kangourou destinées à tous (32 pages mathématiques en couleurs), ainsi que les résultats du concours et les cadeaux, seront envoyés dans les établissements scolaires pour permettre une remise des prix le vendredi 28 mai.

1 Quel est le plus petit nombre réel vérifiant l'équation $x^2 - 2004 = 0$?

- A) -2004 B) 2004 C) 0 D) $\sqrt{2004}$ E) $-\sqrt{2004}$

2 Une pyramide a 17 faces. Combien d'arêtes a-t-elle ?

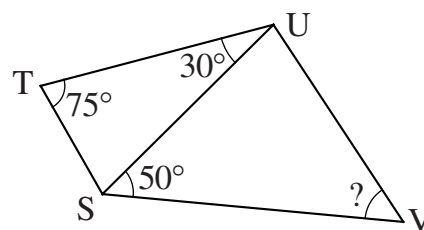
- A) 16 B) 17 C) 18 D) 32 E) 34

3 On achète m stylos à n euros pièce et n stylos à m euros pièce. Quel est le coût moyen d'un stylo ?

- A) 1 B) $\frac{m+n}{2}$ C) $\frac{2mn}{m+n}$ D) mn E) $\frac{m^2n^2}{2}$

4 Sur le dessin ci-contre, certains angles sont indiqués. Si $TU = SV$, quelle est alors la valeur de l'angle \widehat{SVU} ?

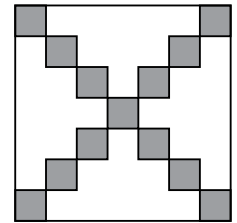
- A) 30°
B) 50°
C) 55°
D) 65°
E) 70°



5 Tout martien a, sur sa tête, un, deux ou trois tentacules. Exactement 1 % de la population martienne est constitué d'individus ayant trois tentacules, exactement 97 % ont deux tentacules et le reste a un tentacule. Quel est le pourcentage des martiens qui ont plus de tentacules sur leur tête que la moyenne de la population martienne ?

- A) 1 % B) 3 % C) 97 % D) 98 % E) 99 %

- 6** s est un entier impair. Dans un carré de côté s , les carrés de côté 1 sur les diagonales sont coloriés (la figure montre la situation avec $s = 7$). Combien mesure la surface restée blanche ?



- A) $(s-1)^2$ B) $s^2 - 1 - 2s$ C) $s^2 + 4 - 4s$
 D) $2s^2 + 1 - 4s$ E) $s(s-2)$

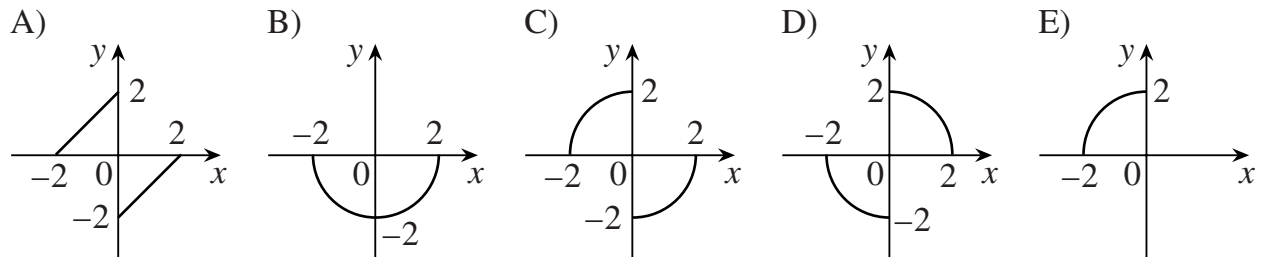
- 7** Combien existe-t-il de nombres à deux chiffres dont le carré et le cube ont le même chiffre des unités ?

- A) 18 B) 21 C) 27 D) 36 E) 40

- 8** Un carré \mathcal{C} est composé de 18 carrés dont 17 ont pour côté 1. Quelle est l'aire du carré \mathcal{C} ?

- A) 25 B) 49 C) 81 D) 100 E) 225

- 9** Quel est l'ensemble des points M dont les coordonnées $(x; y)$ satisfont aux conditions $xy \leq 0$ et $x^2 + y^2 = 4$ parmi les représentations graphiques suivantes ?



- 10** 15 moutons paissaient dans un pré, accompagnés de bergers (tous les moutons ont 4 pieds et les bergers 2). La moitié des bergers ramène au bercail le tiers des moutons.

Il ne reste plus que 50 pieds sur le pré.

Combien y avait-il de pieds au début ?

- A) 60 B) 72 C) 80 D) 90 E) 100

- 11** Dans un repère orthonormal, combien peut-on dessiner de carrés ayant le point $P(-1; -1)$ pour sommet et admettant pour axe de symétrie au moins un des axes du repère ?

- A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

- 12** On a glissé cent cartes numérotées de 1 à 100 dans cent enveloppes.

Chaque enveloppe contient une seule carte.

Quel nombre minimum d'enveloppes dois-je prendre pour être sûr que le produit des nombres qu'elles contiennent soit divisible par 4 ?

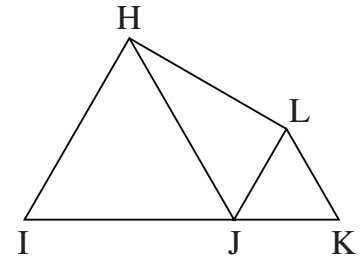
- A) 50 B) 52 C) 60 D) 64 E) 76

- 13** Combien de triangles rectangles peut-on former en joignant 3 sommets d'un polygone régulier à 14 côtés ?

- A) 72 B) 82 C) 84 D) 88 E) autre réponse

- 14** Les côtés des triangles équilatéraux HIJ et JKL mesurent respectivement 2 et 1. Les points I, J et K sont alignés. Quelle est l'aire du quadrilatère HIJL ?

A) $\frac{5\sqrt{3}}{3}$ B) $\frac{4+5\sqrt{3}}{4}$ C) 3
D) $\frac{6+\sqrt{3}}{4}$ E) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

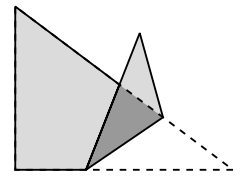


- 15** Un entier naturel non nul est écrit sur chacune des faces d'un cube, et sur chaque sommet on écrit le produit des nombres inscrits sur les trois faces adjacentes à ce sommet. La somme des nombres placés aux sommets du cube est 70. Quelle est la somme des nombres placés sur les faces du cube ?

A) 12 B) 35 C) 14 D) 10 E) on ne peut pas le savoir

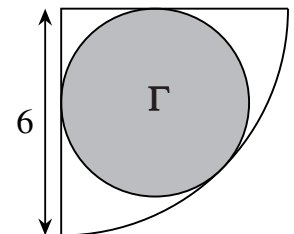
- 16** On découpe dans une feuille de papier un triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit mesurent 6 cm et 8 cm. On plie ensuite le triangle le long d'une droite. Quelle peut être l'aire du polygone obtenu (c'est un hexagone sur le cas particulier dessiné) ?

A) 9 cm² B) 12 cm² C) 18 cm²
D) 24 cm² E) 30 cm²



- 17** Un cercle Γ est inscrit dans un quart de cercle de rayon 6 comme montré sur la figure ci-contre. Quel est le rayon du cercle Γ ?

A) $\frac{6-\sqrt{2}}{2}$ B) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ C) 2,5
D) 3 E) $6(\sqrt{2}-1)$



- 18** Dans une suite géométrique $(a_n)_{n \geq 1}$, nous avons les inégalités suivantes : $a_3 < a_2 < a_4$. Alors :

A) $a_3 \times a_4 > 0$ B) $a_2 \times a_3 < 0$ C) $a_2 \times a_4 < 0$ D) $a_2 < 0$ E) $a_2 \times a_3 > 0$

- 19** Les élections à Herbeville viennent d'avoir lieu. On sait que tout électeur ayant voté pour le parti brocoliste a déjà mangé des brocolis, que 90 % des électeurs ayant voté pour les autres partis n'ont jamais mangé de brocolis et que 46 % des votants ont déjà mangé des brocolis. Quel est le pourcentage des votants obtenu par le parti brocoliste ?

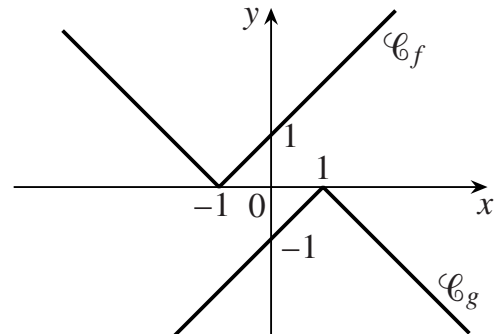
A) 40 % B) 41 % C) 43 % D) 45 % E) 46 %

- 20** Les côtés d'un triangle équilatéral MNO ont pour longueur 4. Quel est le rayon du cercle de centre O qui divise le triangle en deux surfaces de même aire ?

A) $\sqrt{\frac{12\sqrt{3}}{\pi}}$ B) $\sqrt{\frac{24\sqrt{3}}{\pi}}$ C) $\sqrt{\frac{30\sqrt{3}}{\pi}}$ D) $\frac{6\sqrt{3}}{\pi}$ E) $\sqrt{\frac{48\sqrt{3}}{\pi}}$

- 21** La figure ci-contre montre les représentations graphiques \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g des fonctions f et g définies sur \mathbb{R} . Quelle égalité est vraie pour tout x ?

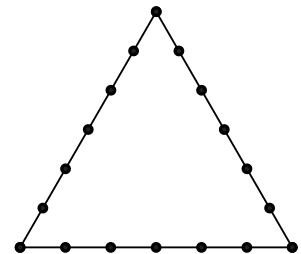
A) $f(x) = -g(x) + 2$
 B) $f(x) = -g(x) - 2$
 C) $f(x) = -g(x+2)$
 D) $f(x+2) = -g(x)$
 E) $f(x+1) = -g(x-1)$



- 22** On commence par écrire dans des cases une suite de 200 zéros. Puis on ajoute 1 au nombre écrit dans chaque case, puis on ajoute 1 aux nombres d'une case sur deux (à partir de la deuxième), puis on ajoute 1 aux nombres d'une case sur trois (à partir de la troisième) et ainsi de suite. Une fois terminé, c'est-à-dire après avoir rajouté le dernier 1 au nombre de la 200^{ème} case, quel est le nombre écrit dans la 120^{ème} case ?
- A) 16 B) 12 C) 20 D) 24 E) 32

- 23** Combien de triangles non-aplatés peut-on dessiner ayant pour sommets trois des 18 points représentés sur la figure ci-contre ?

A) 816
 B) 711
 C) 777
 D) 717
 E) 811



- 24** Un nombre a 3 chiffres : x , y et z (avec $0 < x < y < z$). La somme des 6 nombres obtenus en permutant ces 3 chiffres est 1554. Que vaut z ?
- A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

Pour départager d'éventuels premiers nationaux ex-æquo, le Kangourou pose deux questions subsidiaires.

- 25** Le nombre 2004 est divisible par 12 et la somme de ses chiffres vaut 6. Combien de nombres s'écrivant avec 4 chiffres et strictement inférieurs à 2004 possèdent ces deux propriétés ?
- 26** Quel est le dernier chiffre différent de 0 du produit des cent premiers entiers naturels non nuls ?

© Art Culture Lecture - les Éditions du Kangourou, 12 rue de l'épée de bois 75005 Paris